Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 21: (F08T1A3) Es sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin\left(\frac{1}{z^2-1}\right) \end{array}$.

a) Von welchem Typ sind die Singularitäten bei -1 und 1?

b) Es seien $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j$ und $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_j(z+1)^j$ Laurententwicklungen von f. Zeigen Sie

$$b_j = (-1)^j a_j \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}$$

ohne die Koeffizienten zu berechnen.

c) Beweisen Sie $\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

Aufgabe 22: (F09T3A5) Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, daß f eine nicht konstante affine Funktion ist, dh es gibt $a,b\in\mathbb{C}$ mit $a\neq 0$ und $f(z)=az+b$ für alle $z\in\mathbb{C}$.
Hinweis: Untersuchen Sie die Art der Singularität von f in ∞.

Aufgabe 23: (F14T3A2) Es seien $f:\mathbb{C}\backslash\{i\}\to\mathbb{C}$ und $g:\mathbb{C}\backslash\{i\}\to\mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n\in\mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i+\frac{1}{n}\right) = g\left(i+\frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder ist $f=g$ oder es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$.
(Hinweis: Untersuchen Sie den Typ der Singularität von g im Punkt i.)

Aufgabe 24: (F18T3A3) Es sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{i,-i,0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + e^{-\frac{1}{z^2}} \end{array}$.

(a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.

(b) Zeigen Sie, daß f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}\backslash\{i,-i,0\}$ besitzt.