

## Übungen zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 17:** (F12T3A2) Sei  $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto \frac{1}{(z-1)(2-z)}$ .

- Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von  $f$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .
- Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von  $f$  in  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .
- Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von  $f$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ .
- Zwei reelle Zahlen  $a \neq b$  erfüllen  $1 < a, b < 2$ . Betrachten Sie die Ellipse  $E = \gamma([0, 2\pi])$ , wobei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  ist. Berechnen Sie  
 $t \mapsto a \cos(t) + ib \sin(t)$

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

**Aufgabe 18:** (H14T3A3) Gegeben sei eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit einer Nullstelle der Ordnung  $p \in \mathbb{N}$  in  $z_0$  durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion  $\frac{1}{f}$  um  $z_0$  an.
- Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Funktion  $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$  jeweils um  $z_0 = 0$  und  $z_0 = \pi$ .
- Sei  $\Gamma$  die Kreislinie  $|z - \frac{3}{2}| = 2$  orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sin(z)}$$

**Aufgabe 19:** (H15T3A2)

- Geben Sie die Definition für die Begriffe isolierte Singularität, hebbare Singularität, Polstelle, sowie wesentliche Singularität, an.
- Bestimmen Sie Lage und Art aller isolierten Singularitäten der Funktion  $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$h(z) = \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right)$$

wobei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  den maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion bezeichnet.

**Aufgabe 20:** (H17T3A5) Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

- a) Stellen Sie für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $r > 0$  die Koeffizienten  $a_k$  der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \leq r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

- b) Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte zusätzlich  $\limsup_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-n} |f(z)| < \infty$ . Zeigen Sie, daß  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$  ist.
- c) Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte nun zusätzlich  $\liminf_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-n} |f(z)| > 0$ . Zeigen Sie, daß  $f$  ein Polynom vom Grad  $\geq n$  ist.