Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H18T2A2)

a) (i) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an. so daß die Funktion f durch (1) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, ..., a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_1| = ... = |a_n| = 1$. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so daß das Produkt der Abstände zwischen z und a_j für $j = 1, ..., n$ mindestens 1 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.

Aufgabe 14: (H18T2A1)
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

c) Sei $q \in [0, 1[$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$. Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 15: (F10T2A3) Sei $f_n : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}$. Zeigen Sie, daß durch $f(z) := \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

Aufgabe 16: (H14T1A2)

a) Definieren Sie den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz für Folgen und Reihen von komplexwertigen Funktionen auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(0) = 0$.

i) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ auf jeder in $\mathbb{E}$ enthaltenen kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.

ii) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ i.A. nicht gleichmäßig auf $\mathbb{E}$ konvergiert.