Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (F00T1A1) Gegeben ist die Reihe

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2^n} + ...$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

b) Zeigen Sie, daß für z innerhalb des Konvergenzkreises und für $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$f(z) = z^2 + z^4 + ... + z^{2^n} + f(z^{2^n}).$$

c) Zeigen Sie, daß obige Reihe in jeder Wurzel der Gleichungen

$$z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, ..., z^{2^n} = 1, ...$$

divergiert.

Aufgabe 10: (H01T2A3) Durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ werde eine ganze Funktion f definiert.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

a) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $f(iy) \in \mathbb{R}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\overline{a_n} = (-1)^n a_n$.

c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{f(z)} = f(-\overline{z})$.

Aufgabe 11: (H14T2A1) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort:

a) Es sei $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es $t \in]0, 1[$ mit $f'(t) = 1$.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

d) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

e) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 12: (H13T3A4) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

  i) Zeigen Sie, $\partial(f(G)) \subseteq f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet $\partial A := \overline{A}\backslash\mathring{A}$ den Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{C}$.)

  ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial(f(G)) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial(f(G)) \not\subseteq f(\partial G)$.