Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 5: (H14T3A5) Für die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, so daß $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6: (F13T1A1)

a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung der 0, so daß $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Aufgabe 7: (H15T3A4)

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte

$$|f(z| \leq M|z|^\alpha$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \alpha$; hierbei ist $f^{(0)} = f$ und $f^{(n)}$ die $n-$te Ableitung von f.

b) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$. Zeigen Sie: p ist ein Polynom vom Grad $\leq n_0$.

c) f erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil (a). Zeigen Sie: f ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 8: (H07T2A2)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und beweisen Sie ihn mit Hilfe der Koeffizientenabschätzung von Cauchy.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie: Ist die Funktion $a\mathrm{Re}\, f + b\mathrm{Im}\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so ist f konstant.