Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 53: (F20T1A2)
Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2 - xy^2 \\ \dot{y} &= (x-2)y \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

b) Untersuchen Sie alle Ruhelagen auf asymptotische Stabilität.

c) Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$. Begründen Sie, daß $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ gilt.

Aufgabe 54: (F20T2A4)

a) Sei $x_0 \in]0, \pi[$. Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(x), x(0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte globale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

c) Zeigen Sie, daß es ein $t^* \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß x auf $]-\infty, t^*[$ strikt konvex und auf $]t^*, \infty[$ strikt konkav ist.

Aufgabe 55: (F20T3A1)
Das Vektorfeld $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (\sin(x_2), -\sin(x_1)) \end{array}$ bestimmt die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

a) Zeigen Sie: Für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung $\phi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte (Ruhelagen) in $\mathbb{R}^2$.

c) Zeigen sie, daß die Funktion $\begin{array}{rcl} H : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \cos(x_1) + \cos(x_2) \end{array}$ eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) ist.

d) Welche Gleichgewichtspunkte sind Liapunow-stabil, welche instabil? Benutzen Sie Teil c) zum Nachweis der Liapunow-Stabilität.

Aufgabe 56: (F20T1A5)
Sei $\begin{array}{rcl} G : [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} y(x-1) & \text{für } y \le x \\ x(y-1) & \text{für } y > x \end{cases} \end{array}$

a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß die Funktion $\begin{array}{rcl} u : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_0^1 G(x,y)f(y)dy \end{array}$

zweimal stetig differenzierbar ist mit $u''(x) = f(x)$ für $x \in [0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$.

b) Zeigen Sie, daß durch

$$u_0(x) := 0, \quad u_{n+1}(x) := \int\limits_0^1 G(x,y)\cos(u_n(y))dy \quad \text{für } x \in [0,1], n \in \mathbb{N}_0$$

eine Folge stetiger Funktionen $(u_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert wird, die gleichmäßig gegen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert mit

$$u''(x) = \cos(u(x)) \quad \text{für } x \in [0,1], u(0) = u(1) = 0$$