Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 49: (F10T3A1)
Man bestimme alle Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Hat das System eine stabile oder eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung?

Aufgabe 50: (H04T1A1)
Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix mit nur einem ($n-$fachem) Eigenwert μ.

a) Begründen Sie, warum dann $(A - \mu E_n)^n = 0$ ist. (E_n ist $n \times n-$Einheitsmatix, 0 Nullmatrix)

b) Folgern Sie aus (a), daß man die Exponentialmatrix e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ als Produkt von $e^{\mu t}$ mit einer endlichen Summe von Matrizen ausdrücken kann.

c) Wenden Sie (b) an, um die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 51: (F11T1A2)
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4t}$$

Aufgabe 52: (F11T2A5)
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2e^{2t}y \\ \dot{y} &= -2y \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

b) Geben Sie alle Ruhelagen des Systems an und untersuchen Sie diese auf Attraktivität.