Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 45: (H09T2A2)
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t$$

Man zeige, daß jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$

a) beschränkt bleibt

b) nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 46: (H17T1A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = c,$$

wobei $c > 0$ ein positiver Parameter ist.

a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

b) Man finde ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

c) Man setze φ_c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c), t^+(c)[\to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c(t)$ für $t \to t^+(c)$ und $t \to t^-(c)$?

Aufgabe 47: (H16T1A3)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Aufgabe 48: (H18T1A3)
In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|}\cos(t), \quad x(0) = c$$

für $c \in [0, \infty[$ diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

a) Bestimmen Sie für jedes $c > 1$ eine globale Lösung x_c des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist dies deren einzige globale Lösung?

b) Geben Sie für jedes $0 \leq c \leq 1$ jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an.