Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 41: (F18T2A3)
Seien $R > \rho > 0$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x^2 + y^2 > \rho^2\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius R durch Ausbohren eines Zylinders vom Radius ρ entsteht. Berechnen Sie das Volumen von M.

Aufgabe 42: (H16T1A4) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} e^x \cos(y + x^3) \\ e^x \sin(y + x^3) \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß F beliebig oft differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix DF.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$\Omega := \{F(x, y) : 0 \le y \le x \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Aufgabe 43: (H17T2A3)

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Von einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(0, 0) = 0, \quad D_1 f(0, 0) = 1, \quad D_2 f(0, 0) = 2.$$

Hierbei bezeichnet D_j den partiellen Ableitungsoperator nach der j-ten Koordinate. Auch sei eine weitere Funktion g wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t) := f(f(t, t), f(-t, t)) \end{array}$$

Berechnen Sie den Wert der Ableitung $g'(0)$.

c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W(f)$ der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 44: (F18T2A2)
Diese Aufgabe befaßt sich mit der Maximierung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 4(x + y) \end{array}$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer globalen Maximalstelle.

b) Berechnen Sie die globale Maximalstelle und bestimmen Sie das Maximum von f unter obiger Nebenbedingung.