Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (H13T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) : f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.

Aufgabe 38: (H16T3A3) Sei

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 6\pi\}$$

sowie

$$T := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : r > 0, -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $\varphi : S \to T$ an mit

$$\lim_{\mathrm{Re}\,(z)\to\infty} \varphi(z) = \infty$$

Aufgabe 39: (F15T1A2) Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f : Q \to \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf die offene Einheitskreischeibe $\mathbb{E} : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbilden mit $f(-1 + i) = 0$.

Aufgabe 40: (H11T1A2)
Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie $f = g$.