Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H02T3A1)
Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ werde mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vermöge der Zuordnung $(x, y) \mapsto z := x + iy$ identifiziert.

a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) := x^2 - y^2$. Man zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

b) Gibt es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $u_1(x, y) := \sin(x) + \varphi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches g explizit an.

c) Gibt es eine stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, so daß $u_2(x, y) := \sin(x)\psi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist?. Falls ja, gebe man ein solches h explizit an.

Aufgabe 2: (F08T2A3)

a) Es sei $a > 0$. Untersuchen Sie, ob es eine in $B_{1+a}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + a\}$ holomorphe Funktion f gibt, für die für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(0)| > \frac{n!}{n^k}$$

gilt.

b) Es sei f holomorph auf $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und für alle $z \in B_1(0)$ gelte $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in]0, 1[$ gilt:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

und folgern Sie

$$|f^{(n)}(0)| < e(n + 1)!$$

Aufgabe 3: (F04T1A2)
Es sei
$$f : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin\left(\frac{1}{1-iz}\right).$$

a) Zeigen Sie, daß f holomorph ist und Nullstellen in den Punkten $-i + i\frac{1}{k\pi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ besitzt, aber nicht identisch Null ist.

b) Warum widerspricht das Ergebnis in (a) nicht dem Identitätssatz?

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um 0.

Aufgabe 4: (H06T2A4)
Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche $|f(z)| \leq |\sin(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllen.