Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (F10T2A3) Sei $f_n : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}$. Zeigen Sie, daß durch $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

Aufgabe 20: (F03T3A1)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Zeige

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ konvergiert lokal gleichmäßig absolut auf $\mathbb{E}$.

b) Ist f sogar auf einer offenen Umgebung U des Abschlußes $\overline{\mathbb{E}}$ analytisch und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ absolut für alle $z \in \overline{\mathbb{E}}$, so ist f identisch 0.

Aufgabe 21: (F14T1A4)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bei Annäherung an ∂G gegen ∞ strebt, dh. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \partial G$ gilt $|f(z_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Zeigen Sie, daß f nicht holomorph ist, indem Sie die folgenden Fälle unterscheiden:

(i) f hat keine Nullstelle in G.

(ii) f hat endlich viele Nullstellen in G.

(iii) f hat unendlich viele Nullstellen in G.