

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (F00T3A2) Man berechne das Integral

$$\int_{|z-i|=3} \frac{z}{e^{3z}-1} dz$$

bei dem $|z-i|=3$ im positiven Sinn durchlaufen werde.

Aufgabe 17: (F02T2A2)

Gegeben sei die auf \mathbb{C} meromorphe Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$.

- a) Bestimmen Sie alle Pole dieser Funktion und die Residuen in diesen Polen.
- b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ für den Weg $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto 2e^{it}$
- c) Berechnen Sie $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ für den Weg $\gamma_2 : [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto \begin{cases} 1 + e^{it} & \text{für } t \in [-\pi, \pi] \\ -1 + e^{i(\pi-t)} & \text{für } t \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$

Aufgabe 18: (F03T1A4)

Für $0 \leq r < R$ bezeichne $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ den Kreisring um 0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R . Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$.
 $z \mapsto \frac{4}{z(z^2-2)}$

- a) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $A_{0,1}$ und $A_{2,4}$.
- b) Berechnen Sie das Integral $\int_{|\xi|=1} f(\xi) d\xi$ sowie die Differenz der beiden Integrale
 $\int_{|\xi|=2} f(\xi) d\xi$ und $\int_{|\xi|=\frac{1}{2}} f(\xi) d\xi$.