Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (F03T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, daß f dann die Form $f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat.

b) Es seien $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei g in 0 einen Pol der Ordnung $k > 0$ habe. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $f = g$ ist oder f in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 14: (F19T3A4)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z^2 + 4\pi^2)\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

b) Berechnen Sie für alle reell ganzzahligen Vielfachen von π das Residuum von $\frac{1}{f}$.

c) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Menge

$$M = \{t - i\cos(t) : t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq 1, |z - i| = \pi\}$$

und bestimmen Sie einen geschlossenen Weg Γ, so daß M das Bild von Γ ist.

d) Berechnen Sie das Wegintegral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{f(z)}$.

Aufgabe 15: (F14T2A4) Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2}{z^2-1} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie das Residuum.

b) Zeigen Sie , daß für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $\begin{array}{rcl} f_U : U & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^2}{z^2 - 1} \end{array}$

eine holomorphe Stammfunktion besitzt.