

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (F10T3A5)

Für die Funktion $f(z) = \frac{2}{z(z^2 + 1)}$ bestimme man die Laurentreihen in den Bereichen

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\}$$

$$A_2 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 1\}$$

$$A_3 := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - i| < 3\}$$

und berechne längs $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ die Wegintegrale
 $t \mapsto \frac{1}{2}e^{it}$ und $t \mapsto 4e^{4it}$

$$\int_{\alpha} f(z) dz \text{ und } \int_{\beta} f(z) dz.$$

Aufgabe 11: (H09T2A5)

- a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$ um $z_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.
- b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{|z+1|=2} f(z) dz$. Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.

Aufgabe 12: (H06T1A5)

- a) Eine meromorphe Funktion f sei in der Form $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ mit holomorphem h und $h(z_0) \neq 0$ gegeben. Wie berechnet man das Residuum von f in z_0 ?
- b) Geben Sie für $f(z) = \frac{1}{(4+z^2)^2}$ alle isolierten Singularitäten in \mathbb{C} an samt ihrem Typ und bei Polen auch ihre Ordnung.
- c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.