

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 7: (H17T3A2)

Betrachten Sie die Sinus-Cardinalis-Funktion  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- Zeigen Sie, daß  $f$  zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann.
- Zeigen Sie, daß die fortgesetzte Funktion über  $\mathbb{R}$  uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht absolut integrierbar ist.

### Aufgabe 8: (F17T3A1)

Es seien  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom sowie  $\gamma_{r,w}$  der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius  $r > 0$  um  $w \in \mathbb{C}$ . Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}$$

### Aufgabe 9: (H05T2A1)

Beweisen Sie folgende Aussagen

- Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$$

hat den Konvergenzradius  $\frac{1}{2}$ .

- Ist  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe und  $D \subseteq \mathbb{C}$  eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge, so ist jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{E}$  konstant.
- Es sei  $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ . Die holomorphe Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  ist auf  $z \mapsto \frac{1}{z}$   $A$  nicht gleichmäßig durch Polynome in  $z$  approximierbar.