Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (F19T3A1)
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen mit strikt positivem Realteil.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine der Nullstellen mit $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ aus Teilaufgabe (a). Zeigen Sie, daß $w = z + z^{n-1}$ eine reelle Zahl echt größer Null ist.

c) Sei $n = 5$ und $w > 0$ eine der positiven reellen Zahlen aus Teilaufgabe (a). Nehmen Sie $w \neq 2$ an und zeigen Sie, daß

$$w^2 + w - 1 = 0$$

gilt. Bestimmen Sie den Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ mit $w = 2\cos(\alpha)$.

Aufgabe 5: (H17T1A2)

a) Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6).$$

b) Sei $b > 0$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, daß $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $R > 0$ das Kurvenintegral $\int\limits_{\gamma_R} e^{-x^2}dx$, wobei γ_R der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm R + 0i$ und $\pm R + ib$ ist.

Aufgabe 6: (F15T3A5)
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, die den beiden Bedingungen $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = 1$$

genügt?
Hinweis: Maximumsprinzip für $\frac{1}{f}$ bzw. Minimumsprinzip für f.