Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (F19T1A2)

a) Es sei $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Formulieren Sie das Majorantenkriterium von Weierstraß für die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$.
Von nun an sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, daß f dehnungsbeschränkt (global Lipschitz-stetig) ist, dh. daß es ein $L > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [0,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right) - f(0) \right]$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert (bzgl. x). Begründen Sie, ob die Grenzfunktion stetig ist.

Aufgabe 35: (F19T3A5)

a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

wobei $y^{(k)}$ die $k-$te Ableitung von y bezeichnet.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 12x + 20\exp(2x), x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 36: (F19T3A2)

a) Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Beweisen Sie mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Dreiecks-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Beweisen Sie, daß für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{n}.$$

c) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty$. Beweisen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right| \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$