Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F19T1A1)

a) Es sei

$$P(z) := 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ für alle $k = 0, ..., 2018$ gelte. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit Berücksichtigung der Vielfachheiten gezählt.

b) Formulieren Sie für den Spezialfall holomorpher Funktionen das Argumentprinzip (auch als Satz vom nullstellenzählenden Integral bekannt).

c) Es sei P wie in (a) definiert. Zeigen Sie

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{P'(Z)}{P(z)} dz\right) = 1$$

Hierbei bezeichnet $\partial\mathcal{D}$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

Aufgabe 32: (F18T2A1)

a) Wir betrachten die beiden Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$$

(1) Zeigen Sie, daß eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ existiert.

(2) Geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynpms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 33: (F19T3A3)

a) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 1\}$.

b) Sei $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $w_2 > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von w alle lokalen Extremstellen der linearen Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & w_1x_1 + w_2x_2 \end{array}$ unter der Nebenbedingung, daß $x_1x_2 = 1$ gilt. Diskutieren Sie, ob es sich bei den lokalen Extremstellen jeweils um ein lokales/globales Maximum/Minimum handelt.