Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F12T1A3)
Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$

für alle $z \in U$ gibt.

Aufgabe 29: (F19T1A5)

a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1 + i$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

b) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und es seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie, daß es eine biholomorphe (konforme und surjektive) Abbildung $f : G \to G$ von G auf sich selbst mit $f(a) = b$ gibt.

c) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, daß es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 30: (F19T2A2)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 4z + z^2 + e^z \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ genau eine einfache Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ keinen holomorphen Logarithmuszweig – also kein holomorphes $l : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

c) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}}$ keinen holomorphen Zweig der dritten Wurzel – also kein holomorphes $w : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.