Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H14T3A2)
Auf $\mathbb{R}^2$ sei die reellwertige Funktion $(x, y) \mapsto u(x, y) = (x - y)(x + y + 1)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $f = u + iv$ holomorph ist und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2: (H11T3A2)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$, Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

a) $f(\frac{1}{n^{2011}}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^{2011}} \in \Omega$ aber $f \not\equiv 0$.

b) $g^{(k)}(0) = (k!)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

c) $h(\frac{1}{2n}) = h(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \in \Omega$.

Aufgabe 3: (H14T2A1)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort:

a) Es sei $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es $t \in]0, 1[$ mit $f'(t) = 1$.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

d) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

e) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.