Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 20: (H07T1A1)
Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ genau eine Lösung z_0 hat, und daß diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.

Aufgabe 21: (F04T1A3)
Beweisen Sie, daß für jedes $\alpha \in [-1, 1]$ das Polynom

$$p_\alpha(z) = z^6 + i\alpha z + 1$$

in der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ genau drei Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat.

Aufgabe 22: (F07T3A3)
Sei $G = \mathbb{C} \backslash \{iy : y \in [0, \infty[$ die geschlitzte Ebene und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis.

a) Begründen Sie, daß es eine konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{E}$ gibt.

b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung an.

Aufgabe 23: (H13T3A5) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) : f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.

Aufgabe 24: (H11T1A2)
Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie $f = g$.

Aufgabe 25: (F19T2A4)

a) Zeigen Sie, daß für jedes $\xi > -1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \quad , \quad x(1) = \xi \tag{1}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für $\xi > -1$ die maximale Lösung λ_ξ von (1).
Hinweis: Das Verwenden von $y = x + t$ kann hier helfen.

c) Zeigen Sie, daß $\lambda_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ eine asymptotisch stabile Lösung von $x' = \frac{1}{x+t} - 1$ ist.

Aufgabe 26: (F19T2A3) Es sei $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix e^{At} zu $x' = Ax$.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung von

$$x' = Ax + g(t) \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, daß die in (b) bestimmte Lösung von $x' = Ax + g(t)$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 27: (F19T1A3) Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es sei $x_0 \in]-\pi, \pi[$ und $\varphi : I_{max} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = 1 + \cos(x), \quad x(0) = x_0.$$

Dann ist φ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (also $I_{max} = \mathbb{R}$) und $\varphi(t) \in] - \pi, \pi[$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist jede nicht-konstante Lösung der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ streng monoton.

Aufgabe 28: (F19T1A4)

a) Zeigen Sie: Das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= e^{2x} \end{aligned}$$

besitzt ein Erstes Integral S, dh. es gibt eine nicht-konstante Funktion $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $t \mapsto S(x(t), y(t))$ für jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ des Diffentialgleichungssystems konstant ist. Leiten Sie hieraus ab, daß jede Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ die Relation $y(t) = e^{x(t)}$ für alle t aus dem Definitionsbereich der Lösung erfüllt.

b) Zeigen Sie (zB. mithilfe von (a)), daß jede Lösung des Anfangswertproblems

$$x'' = e^{2x}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1 \tag{2}$$

auch das Anfangswertproblem

$$x' = e^x, \quad x(0) = 0$$

löst.

c) Bestimmen Sie (zB: mithilfe von (b)) die maximale Lösung des Anfangswertproblems (2).