Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 12: (F12T3A2)
Sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{1,2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(2-z)} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0, 2\pi])$, wobei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a\cos(t) + ib\sin(t) \end{array}$ ist. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Aufgabe 13: (H14T3A3)
Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{f}$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und $z_0 = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - \frac{3}{2}| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)}$$

Aufgabe 14: (H11T3A4) Sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-i,i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{iz}(z^2+1)^{-2} \end{array}$

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten i und $-i$ der Funktion f und geben Sie das zugehörige Residuum an.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)(x^2+1)^{-2}dx$.

Aufgabe 15: (F04T3A1) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle

$$f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

a) Beweisen Sie, daß f in 0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle haben kann.

b) Geben Sie konkret eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion mit dieser Eigenschaft an.

Aufgabe 16: (F14T3A2)
Es seien $f : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i + \frac{1}{n}\right) = g\left(i + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder ist $f = g$ oder es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$.
(Hinweis: Untersuchen Sie den Typ der Singularität von g im Punkt i.)

Aufgabe 17: (F19T2A1) Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z} + \exp\left(\dfrac{z-i}{z^2+1}\right) \end{array}$

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei $i, 0$ und $-i$ und berechnen Sie die Residuen $\mathrm{Res}(f, i), \mathrm{Res}(f, 0)$ und $\mathrm{Res}(f, -i)$ von f bei $i, 0$ und $-i$.

b) Weiter sei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\} \\ t & \mapsto & 2e^{-2it} \end{array}$. Berechnen Sie $\int\limits_\gamma f(z)dz$.

Aufgabe 18: (F19T2A5)

a) Gegeben sei die Menge $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le 2|y| \le x \le 6\}$. Skizzieren Sie diese Menge in einem kartesischen Koordinatensystem und berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint\limits_\Delta (x-y)^2 dxdy$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$, wobei der Definitionsbereich durch $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$ definiert werde. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)dz$ mit $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Entscheiden Sie mit Begründung, ob f eine holomorphe Stammfunktion auf D besitzt.

Aufgabe 19: (H05T2A3) Für zwei Zahlen r, R mit $0 < r < R$ bezeichne $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ den Kreisring. Zu $a, b \in \mathbb{C}\backslash A_{r,R}$ betrachte man die holomorphe Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : A_{r,R} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-b}{z-a} \end{array}$$

Ein holomorpher Logarithmus zu f ist eine holomorphe Funktion $l : A_{r,R} \to \mathbb{C}$, die der Gleichung $\exp \circ l = f$ genügt. Zeigen Sie, daß genau dann ein holomorpher Logarithmus zu f existiert, wenn a und b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash A_{r,R}$ liegen.