Tutoriumsblatt 4 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 1:
Zeige, daß die Gleichung

$$e^{x^2 y}\sin(x+y)+3(x-1)^2-3=0 \tag{1}$$

in der Nähe von $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann, dh. daß es ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und ein $u : I \to \mathbb{R}$ gibt mit $u(0)=0$ und $e^{x^2 u(x)}\sin(x+u(x))+3(x-1)^2-3=0$ für alle $x \in I$. Wie lautet die erste Ableitung von u?

Aufgabe 2:

a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto 4(x+y) \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y)=x^2+y^2=1$ ein Maximum und ein Minimum besitzt.

b) Bestimme diese.

Aufgabe 3:
Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \gamma : [0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \end{array}$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma f\,dx$.