

Tutoriumsblatt 2 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 1:

Zeige, daß die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λ -integrierbar

$$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

sind und berechne $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ und $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

Aufgabe 2:

a) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ existiert und berechne es.

b) Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf \mathbb{R}^2 und $W := [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeige, daß das Integral

$$\int_W xy \sin(x^2) d\lambda^2(x, y)$$

existiert und berechne es.

Aufgabe 3:

Sei $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2|y| \leq x \leq 6\}$. Skizziere diese Menge und zeige, daß $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto (x - y)^2$

λ^2 -integrierbar ist und berechne

$$\int_{\Delta} f d\lambda^2.$$