# Tutoriumsblatt 11 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

**Aufgabe 1:**
Bestimme für jede isolierte Singularität der folgenden Funktionen den Typ der Singularität und das Residuum:

a) $$\begin{array}{rcl} \cot : \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \cos\left(\frac{1}{z}\right) \end{array}$$

**Aufgabe 2:**
Für die Funktion $f(z) = \dfrac{2}{z(z^2+1)}$ bestimme die Laurentreihen in den Bereichen

$$\begin{array}{rcl} A_1 & := & \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\} \\ A_2 & := & \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\} \\ A_3 & := & \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| \ < 3\} \end{array}$$

und berechne längs $\begin{array}{rcl} \alpha : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}e^{it} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \beta : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 4e^{4it} \end{array}$ die Wegintegrale $\int\limits_{\alpha} f(z)dz$ und $\int\limits_{\beta} f(z)dz$.

**Aufgabe 3:**
Sei

$$A := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeige: Jede auf ganz $\mathbb{C}\backslash A$ definierte, beschränkte holomorphe Funktion ist konstant.