

Tutoriumsblatt 10 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 1:

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\} \subseteq U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $|f(\xi)| \leq 3$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| = 2$. Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt $|f''(z)| \leq 12$.

Aufgabe 2:

- a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeige, daß es ein $z \in U$ gibt mit $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.
- b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man
 - i) auf die Voraussetzung $f(0) = 0$ verzichtet, oder
 - ii) U durch eine beliebige offene Teilmenge von \mathbb{C} mit $0 \in U$ und $1 \in U$ ersetzt?

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeige, daß f konstant ist.