

Tutoriumsblatt 1 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 1:

Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sei \mathcal{A} -meßbar mit $\int_X f d\mu < \infty$. Zeige: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\mu(\{x \in X : f(x) > \varepsilon\}) < \infty$.

Aufgabe 2 - Poissonmaß

Gegeben sei die σ -Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Zeige, daß für $\lambda > 0$ durch

$$\mu(A) := e^{-\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \mathbf{1}_A(j), \quad A \subseteq \mathbb{N} \quad (1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß (Poissonmaß) definiert wird. Damit definiert $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ einen Maßraum.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ eine nicht-negative Funktion. Zeige, daß dann gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}. \quad (2)$$

(c) Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow]0, \infty[$ gegeben durch $g(n) := \frac{1}{n}$. Zeige, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{N}} g d\mu \quad (3)$$

konvergiert und berechne dessen Wert.

(d) Sei nun $0 < \lambda < 1$ und $h : \mathbb{N} \rightarrow]0, \infty[$ gegeben durch $h(n) := (n-1)!$. Zeige, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{N}} h d\mu \quad (4)$$

konvergiert und berechne dessen Wert.

Aufgabe 3:

Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; berechne den Grenzwert
 $x \mapsto \frac{n \sin(x)}{1+n^2 \sqrt{x}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda.$$