

Übungsblatt 8 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 78: (10 Punkte)

Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + Lx(t) = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1 \quad (1)$$

- a) Zeige mittels Potenzreihenansatz $\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$, daß (1) eine Lösung $\lambda :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.
- b) Ist die Lösung aus (a) auf $] - 1, 1[$ eindeutig bestimmt?

Aufgabe 79: (10 Punkte)

- a) Bestimme eine Basis des Lösungsraums von

$$x^{(4)} - 4x^{(3)} + 8x'' - 8x' + 4x = 0$$

- b) Löse das Anfangswertproblem

$$x^{(4)} - 4x^{(3)} + 8x'' - 8x' + 4x = e^{2t}, \quad x(0) = x''(0) = 1, x'(0) = x^{(3)}(0) = 0$$

Aufgabe 80: (15 Punkte)

- a) Sei

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 + 3xy^2 - 3xy \end{aligned}$$

Bestimme alle kritischen Punkte von g und entscheide jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

- b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -6xy + 3x \\ \dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y \end{aligned}$$

sind stabil, welche instabil?

Aufgabe 81: (15 Punkte)

Für die autonome Differentialgleichung

$$x' = y \quad (2)$$

$$y' = 2x - 4x^3 \quad (3)$$

- a) Bestimme alle konstanten Lösungen.
- b) Finde eine Erhaltungsgröße.
- c) Zeige, welche der konstanten Lösungen stabil und welche instabil sind.
- d) Erstelle ein Phasenportrait
- e) Zeige, daß alle maximalen Lösungen dazu auf \mathbb{R} definiert sind.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 27.6.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock