Übungsblatt 7 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 74: (10 Punkte)
Bestimme alle Lösungen von

$$x' = \sqrt{|x|} + |x|, \quad x(0) = 0,$$

deren Graphen nicht relativ kompakt in $\mathbb{R}^2$ sind.

Aufgabe 75: (10 Punkte)

a) Bestimme für das lineare Differentialgleichungssystem $X' = A(t)X$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix.
Hinweis: Um eine Lösung von $X' = A(t)X$ zu finden ist ein Versuch mit konstanten Einträgen und mit $e^{\pm t}$ naheliegend.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} \end{array}$. Bestimme die Lösung von

$$X' = A(t)X + g(t), X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Berechne $e^{tA(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 76: (10 Punkte)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \sin(3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$. Bestimme die Fundamentalmatrix e^{tA} zu $x' = Ax$ und löse das Anfangswertproblem

$$x' = Ax + g(t), x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 77: (10 Punkte)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{array}{rcl} g :]0, \infty[& \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{1 - e^{-t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$. Bestimme die Fundamentalmatrix e^{tA} zu $x' = Ax$ und löse das Anfangswertproblem

$$x' = Ax + g(t), x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 19.6.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock