Übungsblatt 6 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 70: (10 Punkte)
Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $v \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ mit

$$\langle v(x), x \rangle = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeige, daß die maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}^d$ des Anfangswertproblems

$$x' = v(x)\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

das maximale Lösungsintervall $I = \mathbb{R}$ besitzt und $\|\lambda(t)\| = \|x_0\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 71: (10 Punkte)
Bestimme die maximale Lösung von

$$x' = e^t(x^2 - 3x + 2), \quad x(0) = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 72: (10 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = -\tan(x)e^x, \quad x(0) = -1$$

a) Zeige, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung λ auf $[0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimme $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t)$.

Aufgabe 73: (15 Punkte)
Sei $D := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 < 1\}$ und $\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{1 - t^2 - x^2} \end{array}$. Zeige:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

b) Die Grenzwerte $\varphi(a) := \lim\limits_{t \searrow a} \varphi(t)$ und $\varphi(b) := \lim\limits_{t \nearrow b} \varphi(t)$ exitieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt $-a = b$, $b^2 + (\varphi(b))^2 = 1$ und $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 6.6.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock