Übungsblatt 5 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 66: (10 Punkte)
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf I. Die auf $V := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in I,\, x > 0\}$ erklärte Differentialgleichung

$$x'(t) \;=\; g(t)\, x(t) \;+\; h(t)\, x^{\alpha}(t) \tag{1}$$

heißt dann Bernoulli-Differentialgleichung.

a) Rechne nach, daß $\lambda \in C^1(I, \mathbb{R})$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn

$$\mu(t) := \lambda(t)^{1-\alpha}$$

eine Lösung von

$$y'(t) \;=\; (1-\alpha)\big(g(t)\, y(t) \;+\; h(t)\big)$$

ist.

b) Bestimme eine Lösung von

$$x' + x - t\sqrt{x} = 0, \qquad x(0) = 0 \tag{2}$$

c) Ist die Lösung von (2) eindeutig?

Aufgabe 67: (10 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$e^x - 4t + (2e^{2x} + te^x)x' = 0, \quad x(0) = 0$$

Aufgabe 68: (10 Punkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend, $(t_0, x_0) \in U$ und $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung

$$f(t,x) + g(t,x)x' = 0 \tag{3}$$

sei nicht exakt. Zeige:

a) Ist $f(t,x) \neq 0$ für alle $(t,x) \in U$ und gibt es eine Funktion m mit

$$m(x) = h(t,x) := \frac{1}{f(t,x)}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right] \qquad \text{für alle } (t,x) \in U,$$

so definiert $M(t,x) := e^{-\int_{x_0}^{x} m(s)ds}$ einen integrierenden Faktor für (3).

b) Ist $g(t,x) \neq 0$ für alle $(t,x) \in U$ und gibt es eine Funktion m mit

$$m(t) = h(t,x) := \frac{1}{g(t,x)}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right] \qquad \text{für alle } (t,x) \in U,$$

so definiert $M(t,x) := e^{\int_{t_0}^{t} m(s)ds}$ einen integrierenden Faktor für (3).

Aufgabe 69: (10 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$e^t + \left(\arctan(x) + e^t + \frac{1}{1+x^2}\right) x' = 0, \quad x(0) = 0.$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 29.5.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock