Übungsblatt 4 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 62: (10 Punkte)
Zeige, daß die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & \dfrac{1}{(1+(x_1+x_2)^2)(1+(2x_1+5x_2)^2)} \end{array}$$

λ^2- integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist und berechne $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2$.

Aufgabe 63: (10 Punkte)
Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2-u^2-v & = & 0 \\ x^2+2y^2+3u^2+4v^2 & = & 1 \end{array}$$

in der Nähe von $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$ nach (u,v) aufgelöst werden kann. Wie lauten die ersten Ableitungen dieser „Auflösungen“?

Aufgabe 64: (10 Punkte)
Es sei $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq -x^2\}$ der Definitionsbereich der Funktion $\begin{array}{rcl} f:D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2+2y \end{array}$.

a) Skizziere die Menge D.

b) Zeige, daß die Funktion f ein globales Minimum besitzt.

c) Bestimme das globale Minimum von f sowie alle Stellen in D, bei denen dieses angenommen wird.

Aufgabe 65: (10 Punkte)
Es sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2\backslash\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

a) Berechne $D_2 f_1$ und $D_1 f_2$.

b) Besitzt f eine Stammfunktion?

c) Es sei $\begin{array}{rcl} \gamma:[1,2] & \to & \mathbb{R}^2\backslash\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{array}$. Berechne $\int\limits_\gamma f dx$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 23.5.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock