Übungsblatt 3 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 58: (10 Punkte)
Es sei λ^3 das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^3$, $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \sqrt{|z|}\}$,

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & e^{-x^2-y^2-z^2} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} g : B & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2+y^2)e^{-z^2} \end{array}.$$

Zeige, daß f und g λ^3-integrierbar sind und berechne

$$\int\limits_A f d\lambda^3 \quad \text{und} \int\limits_B g d\lambda^3.$$

Aufgabe 59: (15 Punkte)
Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$, $\lambda^d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : f \text{ meßbar }, \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda^d < \infty \right\}$. Zeige:

a) Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in \mathbb{R}^d$ existiert

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k,x\rangle} f(x) d\lambda^d(x)$$

und $\begin{array}{rcl} \widehat{f} : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ k & \mapsto & \widehat{f}(k) \end{array}$ definiert eine stetige Funktion mit

$$\|\widehat{f}\|_\infty := \sup\{|\widehat{f}(k)| : k \in \mathbb{R}^d\} \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda^d$$

b) Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$ kompakt in $\mathbb{R}^d$, so gilt $f, D_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \{1, ..., d\}$ und $|\widehat{f}(k)| \overset{\|k\| \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\text{supp}(f)$ kompakt in $\mathbb{R}^d$, so gilt

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial k_j}(k) & = & -i\widehat{x_j f}(k) \\ \widehat{D_j f}(k) & = & i k_j \widehat{f}(k) \end{array}$$

Aufgabe 60: (10 Punkte)
Definiere die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - e^{xy}, \quad g(x,y) := (1 - x^2 - y^2)^2.$$

Bestimme die lokalen Extrema von f und g.

Aufgabe 61: (15 Punkte)
Es sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x}{1 - x^2 - y^2} \\ e^{x+y^2} \\ \ln\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + y}\right) \end{pmatrix} \end{array}$$

dreimal stetig differenzierbar ist und bestimme das Taylorpolynom 3. Grades.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 16.5.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock