Übungsblatt 2 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 54: (10 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_0^1 \cos(x)e^{-x}dx$

b) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}dx$

Aufgabe 55: (10 Punkte)
Es sei $M := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [x,\pi], x \in [0,\pi]\}$. Zeige, daß die Funktion $\begin{array}{rcl} f : M & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \cos(t^2) \end{array}$

λ^2-integrierbar ist und berechne das Integral

$$\int\limits_M f d\lambda^2$$

existiert und berechne es.

Aufgabe 56: (10 Punkte)
Zeige, daß die Funktionen

a) $\begin{array}{rcl} f :]0,10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{(1+x^2)^3} \end{array}$

$\lambda-$integrierbar sind und berechne die Integrale $\int\limits_0^{10} \ln(x)dx$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$.

Aufgabe 57: (15 Punkte)
Es sei $\begin{array}{rcl} f :]0,\infty[\times]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x}e^{-yx} \end{array}$.

a) Zeige, daß für jedes $y \in]0,\infty[$ die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot,y) :]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x}e^{-yx} \end{array}$$

integrierbar ist, also $\begin{array}{rcl} I :]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-yx}dx \end{array}$ existiert.

b) Zeige, daß I für jedes $\varepsilon > 0$ auf $]\varepsilon,\infty[$ differenzierbar ist und berechne $I'(y)$ für jedes $y \in]\varepsilon,\infty[$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 8.5.2019, 10 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock