Ferienblatt zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 94: (15 Punkte)

Berechne das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$ unter Verwenden des Weges $\gamma_r := \gamma_{r,1} \dot{+} \gamma_{r,2} \dot{+} (-\gamma_{r,3})$, wobei

$\begin{array}{rcl} \gamma_{r,1} : [0,r] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t \end{array}$, $\begin{array}{rcl} \gamma_{r,2} : [0,\frac{2\pi}{3}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & re^{it} \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \gamma_{r,1} : [0,r] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\frac{2\pi i}{3}}t \end{array}$ sind.

Aufgabe 95: (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ analytisch und es gelte $f(\frac{1}{2n}) = 0$ und $f(\frac{1}{2n+1}) = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = e$.

Aufgabe 96: (15 Punkte)

Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 - 1 - \frac{1}{2}e^z \end{array}$ in der linken Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$ – mit Vielfachheiten gezählt – genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 98: (20 Punkte)

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}dx$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin(t)}dt$

Aufgabe 99: (15 Punkte)

Es sei $G = \mathbb{C}\backslash\{iy : y \in [0,\infty[$ die geschlitzte Ebene und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis.

a) Begründe, daß es eine biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{E}$ gibt.

b) Gib explizit eine solche Abbildung an.

Mit dem Ferienblatt kann man zusätzliche Übungspunkte bekommen; die Bestehensquote für die Übung bleibt bei den 35% der ersten elf Blättern. Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Dienstag 15.10.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock