Übungsblatt 11 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 90: (15 Punkte)
Bestimme die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{0,-1,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1+3z}{z(z+1)^2(z-1)} \end{array}$$

a) um 0 auf $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$

b) um 0 auf $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

c) um -1 auf $C := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$

d) um -1 auf $D := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+1| < 2\}$

e) um -1 auf $E := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 2\}$

Aufgabe 91: (10 Punkte)
Bestimme für jede isolierte Singularität der folgenden Funktionen den Typ der Singularität – und bei Polen auch die Polordnung und das Residuum:

a) $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{\sin(z)} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{C}\backslash\{i,-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right) \end{array}$$

Aufgabe 92: (15 Punkte)

a) Für $R > 1$ betrachte den aus $\begin{array}{rcl} \gamma_{R,1} : [-R,R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \gamma_{R,2} : [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Re^{it} \end{array}$ zusammengesetzten Weg $\gamma_R := \gamma_{R,1} \dot{+} \gamma_{R,2}$ und berechne die Umlaufzahl $n(\gamma_R, i)$ von i bzgl. γ_R einmal unter Verwendung von Lemma 11.2.11 und einmal ohne Lemma 11.2.11.

b) Bestimme für $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-i,i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^2+1} e^{\frac{i}{z-i}} \end{array}$ die Art der Singularität bei i und berechne das Residuum $\mathrm{Res}(f, i)$.

c) Zeige, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{x-i}} \frac{dx}{x^2+1}$$

existiert und berechne es.

Aufgabe 93: (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeige, daß es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \pi$ gibt.

b) Gib ein konkretes Beispiel für eine derartige Funktion an.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 18.7.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock