Übungsblatt 10 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

Aufgabe 86: (15 Punkte)

a) Es sei

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t - \sin(t) + i(1-\cos(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2 : [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t - \sin(t) - i(1-\cos(t)) \end{array}$$

und $\gamma := \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_2)$. Berechne

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-3)^4} dz$$

b) Zeige, daß durch $f^{(n)}(0) = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert wird.

c) Es sei γ der Weg aus b). Berechne damit

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-1)^3} d\xi$$

d) Berechne für $\begin{array}{rcl} \eta : [0,4\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & i + 3e^{-3it} \end{array}$ das Integral $\displaystyle\int_\eta \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi$.

Aufgabe 87: (15 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gibt $c \in \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, daß f konstant ist.

b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so daß $a \operatorname{Im} g + b \operatorname{Re} g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist. Zeige, daß g konstant ist.

c) Bestimme alle holomorphen $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(z) \neq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|h(z) - \pi| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| \geq 1$.

Aufgabe 88: (10 Punkte)

Es sei $\rho > 0$, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \rho\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch mit:

- 0 ist eine einfache Nullstelle von f
- $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U \setminus \{0\}$.
- Es gibt ein $c \in]0, \infty[$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Zeige: Es gibt ein $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| = c$, so daß $f(z) = bz$ für alle $z \in U$ gilt.

Aufgabe 89: (10 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $\overline{G}$ der Abschluß von G, ∂G der Rand von G und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Zeige: Ist die Einschränkung $f|_G$ von f auf G holomorph, so gilt: $\partial(f(G)) \subseteq f(\partial G)$.

b) Gib ein Beispiel für ein derartiges G und holomorphes $f|_G$ mit $\partial(f(G)) \neq f(\partial G)$ an.

c) Gib ein Beispiel für ein derartiges G und f mit unendlich oft reell differenzierbarem $f|_G$ und $\partial(f(G)) \not\subseteq f(\partial G)$ an.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 11.7.2019, 12 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock