

## Übungsblatt 1 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (LA Gymnasium)

### Aufgabe 50: (10 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{A}$ -meßbar. Zeige, daß  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$

$$A \mapsto \int_X f \mathbf{1}_A d\mu$$

ein Maß definiert.

### Aufgabe 51: (10 Punkte)

a) Zeige: Für alle  $y \geq 0$  ist die Folge  $\left(1 + \frac{y}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend.

b) Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow [0, \infty[$   $\mathcal{A}$ -meßbar. Berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \ln \left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu$$

### Aufgabe 52: (10 Punkte)

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  das Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $\lambda$ -integrierbar. Betrachte die Funktionenfolgen  $(g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & , \text{ falls } x > 0 \end{cases} ,$$

$$g_n(x) := g(nx) ,$$

$$h_n(x) := g_n(x - a) g_n(-(x - b))$$

Zeige, daß  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge meßbarer Funktionen ist und berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_n d\lambda \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f h_n d\lambda .$$

### Aufgabe 53: (10 Punkte)

Es sei  $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  das Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Berechne die Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\cos(x)} d\lambda(x)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{ne^{x^2}}{1 + n^{\frac{3}{2}}} d\lambda(x) .$$

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 2.5.2019, 14 Uhr – im  
Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock**