Übungsblatt 9 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 29: (10 Punkte)
Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & \dfrac{2t}{t^2-1} \end{pmatrix} x(t) \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

eine eindeutige maximale Lösung besitzt und berechne diese.

Aufgabe 30: (10 Punkte)
Sei $A \in M_d(\mathbb{K})$ und $\mu \in \mathbb{K}$ d-facher Eigenwert von A.

a) Zeige: $(A - \mu E_d)^d = 0$.

b) Schreibe e^{tA} als Produkt von $e^{t\mu}$ und einer Summe von endlich vielen Matrizen.

c) Berechne e^{tA} für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Dies geht, ohne die Jordan Normalform zu bestimmen...

Aufgabe 31: (10 Punkte)
Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}$$

und $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} \end{array}$ wie in Aufgabe 23. Entscheide, ob die Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von

$$X' = A(t)X + g(t), X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

asymptotisch stabil, stabil oder instabil ist.

Aufgabe 32: (10 Punkte)

a) Zeige, daß für jedes $\xi > -1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \quad , \quad x(1) = \xi \tag{2}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimme für $\xi > -1$ die maximale Lösung λ_ξ von (2).

c) Zeige, daß $\lambda_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ eine asymptotisch stabile Lösung von $x' = \frac{1}{x+t} - 1$ ist.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 3.7.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock