Übungsblatt 7 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 22: (15 Punkte)
Für $\xi \in \mathbb{R}$ betrachte das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = \xi.$$

Zeige:

a) Für jedes ξ existiert eine eindeutige Lösung λ_ξ auf $]-1,\infty[$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = \infty$ für jedes $\xi \geq 0$.

c) Es existiert ein $\xi < 0$, so daß $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = -\infty$.

d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so daß $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = \infty$ für jedes $\xi > \alpha$, $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) = -\infty$ für jedes $\xi < \alpha$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_\xi(t) \in \mathbb{R}$ für $\xi = \alpha$.

Aufgabe 23: (15 Punkte)

a) Bestimme für das lineare Differentialgleichungssystem $X' = A(t)X$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix.
Hinweis: Um eine Lösung von $X' = A(t)X$ zu finden ist ein Versuch mit konstanten Einträgen und mit $e^{\pm t}$ naheliegend.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} \end{array}$. Bestimme die Lösung von

$$X' = A(t)X + g(t), X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Berechne $e^{tA(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 24: (10 Punkte)
Bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x'' &= x + 3y \\ y' &= x' \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 19.6.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock