Übungsblatt 6 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 19: (15 Punkte)
Es sei $V := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < t + x < \frac{\pi}{2}\}$ und $\begin{array}{rcl} f : V & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(x+t)} - 1 \end{array}$. Bestimme die allgemeine Lösung von $x' = f(t,x)$.

Aufgabe 20: (15 Punkte)
Es seien

$$\begin{array}{rcl} l^\infty & := & \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\} \\ c_0 & := & \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}. \end{array}$$

Zeige

a) $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum und c_0 ein abgeschlossener Unterraum.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$ und folgere daraus, daß die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} g : l^\infty & \longrightarrow & l^\infty \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(2\sqrt{|x_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} f : c_0 & \longrightarrow & c_0 \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(2\sqrt{|x_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

stetig sind.

c) Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f\big(x(t)\big), \qquad x(0) = \left(\tfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

besitzt in keinem Intervall der Form $]-a,a[$ mit $a > 0$ eine Lösung

$$\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} :]-a,a[\to c_0.$$

Hinweis: Welches Anfansgwertoroblem würde eine Komponente λ_n lösen?

Aufgabe 21: (10 Punkte)
Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \dfrac{\sqrt{|1-x^2|^3}}{x} \end{array}$. Bestimme alle Lösungen $\mu : I \to \mathbb{R}$ von $x' = f(t,x)$, $x(0) = 2$, so daß $\Gamma_+(\mu) := \{(t,\mu(t)) : t \in I, t \geq 0\}$ und $\Gamma_-(\mu) := \{(t,\mu(t)) : t \in I, t \leq 0\}$ nicht relativ kompakt in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ sind.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 5.6.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock