

## Übungsblatt 5 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

### Aufgabe 16: (15 Punkte)

Es sei  $f : ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Bestimme die maximale Lösung von

$$(t, x) \mapsto \frac{1}{t^2} + x^2$$

$$x' = f(t, x), \quad x(1) = 1. \tag{1}$$

Hinweis: Die Substitutionen  $y = \frac{1}{x}$  und  $z = \frac{y}{t}$  könnten bei der Berechnung einer Lösung weiterhelfen.

### Aufgabe 17: (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = -\tan(x)e^x, \quad x(0) = -1$$

- a) Zeige, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung  $\lambda$  auf  $[0, \infty[$  besitzt.
- b) Bestimme  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ .

### Aufgabe 18: (15 Punkte)

Sei  $D := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t^3 + x^3 < 1\}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(t, x) \mapsto \sqrt{1 - t^3 - x^3}$$

- a) Skizziere  $D$  und den Rand  $\partial D$ .
- b) Zeige: Das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte maximale Lösung  $\lambda : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < 0 < b \leq 1$ .

- c) Zeige: Der Grenzwert  $\lambda(b) := \lim_{t \nearrow b} \lambda(t)$  existiert in  $\mathbb{R}$  und es gilt  $b^3 + (\lambda(b))^3 = 1$  und  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < b < 1$ .

**Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 29.5.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock**