Übungsblatt 4 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 12: (10 Punkte)
Es seien $x_0 \in \mathbb{K}^d$ und $v \in C^1(\mathbb{K}^d, \mathbb{K}^d)$ mit

$$\langle v(x), x \rangle = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^d.$$

Zeige, daß die maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{K}^d$ des Anfangswertproblems

$$x' = v(x), \qquad x(0) = x_0,$$

das maximale Lösungsintervall $I = \mathbb{R}$ besitzt und $\|\lambda(t)\| = \|x_0\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 13: (10 Punkte) Bestimme die maximale Lösung von

$$x' = \frac{1}{1+|x|}, \quad x(12) = 4$$

Aufgabe 14: (10 Punkte) Bestimme die maximale Lösung von

$$x' = (x^2 - 1)t, \quad x(0) = 0$$

Aufgabe 15: (10 Punkte)
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und dazu das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \qquad x(0) = 0. \tag{1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) f ist stetig differenzierbar $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

b) f ist stetig differenzierbar und $\lambda :]-1, 1[\to \mathbb{R}^d$ ist die maximale Lösung von (1) $\Rightarrow$ $\limsup_{t \nearrow 1} \|\lambda(t)\| = \infty$.

c) (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung der 0 Lipschitz-stetig.

d) f ist beschränkt und lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

Die Antworten sind durch Hinweise auf entsprechende Sätze oder Gegenbeispiele zu begründen.
Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 22.5.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock