

Übungsblatt 3 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 9: (10 Punkte)

- a) Zeige, daß die Differentialgleichung

$$-\frac{x}{t^2+x^2} + \frac{t}{t^2+x^2} x' = 0$$

auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakt ist.

- b) Berechne die partiellen Ableitungen von

$$F_1(t, x) = \arctan(x/t) \quad \text{und} \quad F_2(t, x) = -\arctan(t/x).$$

Wieso liefert dies keinen Widerspruch zu Teil (a)?

Aufgabe 10: (15 Punkte)

- a) Berechne für das Anfangswertproblem $x' = x^2, x(0) = 1$ die Picarditerierten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ und λ_3 .

- b) Betrachte für dieses Anfangswertproblem die Einschränkung $f : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto x^2$
 auf einen Zylinder. Welches Lösungsintervall für die Picarditerierten garantiert der Satz von Picard-Lindelöf und welche Fehlerabschätzungen folgen daraus?

- c) Zeige, daß die n -te Picarditerierte die Form

$$\lambda_n(t) = 1 + t + \dots + t^n + t^{n+1} p_n(t)$$

mit einem Polynom p_n hat.

- d) Welche Potenzreihe ergibt sich als Lösung?

- e) Löse $x' = x^2, x(0) = 1$ und vergleiche.

Aufgabe 11: (15 Punkte)

Es sei λ das Lebesguemaß auf \mathbb{R} .

- a) Zeige, daß

$$f : \mathbb{R} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(x^2+1)}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

λ -integrierbar ist.

- b) Berechne $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 15.5.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock