

## Übungsblatt 2 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

### Aufgabe 5: (10 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$e^x - 4t + (2e^{2x} + te^x)x' = 0, \quad x(0) = 0$$

### Aufgabe 6: (10 Punkte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und einfach zusammenhängend,  $(t_0, x_0) \in U$  und  $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Die Differentialgleichung

$$f(t, x) + g(t, x)x' = 0 \tag{1}$$

sei nicht exakt. Zeige:

- a) Ist  $f(t, x) \neq 0$  für alle  $(t, x) \in U$  und gibt es eine Funktion  $m$  mit

$$m(x) = h(t, x) := \frac{1}{f(t, x)} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right] \quad \text{für alle } (t, x) \in U,$$

so definiert  $M(t, x) := e^{-\int_{x_0}^x m(s) ds}$  einen integrierenden Faktor für (1).

- b) Ist  $g(t, x) \neq 0$  für alle  $(t, x) \in U$  und gibt es eine Funktion  $m$  mit

$$m(t) = h(t, x) := \frac{1}{g(t, x)} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right] \quad \text{für alle } (t, x) \in U,$$

so definiert  $M(t, x) := e^{\int_{t_0}^t m(s) ds}$  einen integrierenden Faktor für (1).

### Aufgabe 7: (10 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$e^t + \left( \arctan(x) + e^t + \frac{1}{1+x^2} \right) x' = 0, \quad x(0) = 0.$$

### Aufgabe 8: (20 Punkte)

Es sei  $a > 0$  und  $c \in ]0, 1[$ . Die Funktion  $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und genüge der Bedingung

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{c}{t} |x - y| \quad \text{für } 0 < t \leq a \text{ und } x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- a) Zeige, daß

$$X := \left\{ u \in C([0, a]) : \|u\| := \sup \left\{ \frac{|u(t)|}{t} : t \in ]0, a] \right\} < \infty \right\}$$

versehen mit  $\|\cdot\|$  ein Banachraum ist.

- b) Zeige, daß  $T : X \rightarrow X$  definiert durch

$$(Tu)(t) := \int_0^t f(s, \eta + u(s)) ds \tag{3}$$

eine Kontraktion ist.

- c) Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = \eta \tag{4}$$

in  $[0, a]$  genau eine Lösung besitzt und sich diese iterativ berechnen läßt.

**Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 8.5.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock**