Übungsblatt 11 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 37: (10 Punkte)
Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= x^2y + 3y =: f(x,y) \\ y' &= -xy^2 - 3x =: g(x,y). \end{aligned}$$

Zeige:

a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.

b) Das System ist ein Hamiltonsches System.

c) Jede Lösung ist beschränkt.

d) Jede maximale Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

e) Die Nullösung ist stabil, aber nicht attraktiv.

Aufgabe 38: (10 Punkte)
Es sei $b > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in]0,b]$ und $\Phi :]\tau, \tau+b] \to \mathbb{R}$, $\Psi :]\tau, \tau+b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\Phi(t) < \Psi(t)$ für $t \in]\tau, \tau+\varepsilon[$. Zeige: Dann gilt entweder

a) $\Phi(t) < \Psi(t)$ für $t \in]\tau, \tau+b]$

oder

b) Es gibt ein $t_0 \in]\tau, \tau+b]$ mit $\Phi(t) < \Psi(t)$ für $t \in]\tau, t_0[$, $\Phi(t_0) = \Psi(t_0)$ und $\Phi'(t_0) \geq \Psi'(t_0)$.

Für die nchste Aufgabe noch folgende **Definition :** Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $a, b > 0$, $(\tau, \xi) \in V$ und $f : V \to \mathbb{R}$. Dann heißt eine stetig differenzierbare Funktion $v : [\tau, \tau+b] \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(v) := \{(t, v(t)) : t \in [\tau, \tau+b]\} \subseteq V$ eine rechte Unterfunktion / Oberfunktion des Anfangswertproblems $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$, wenn

$$\begin{aligned} v'(t) &< f(t, v(t)) \qquad \text{für } t \in [\tau, \tau+b] \quad \text{und } v(\tau) \leq \xi \\ v'(t) &> f(t, v(t)) \qquad \text{für } t \in [\tau, \tau+b] \quad \text{und } v(\tau) \geq \xi \end{aligned}$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $w : [\tau-a, \tau] \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(w) := \{(t, w(t)) : t \in [\tau-a, \tau]\} \subseteq V$ heißt eine linke Unterfunktion / Oberfunktion des Anfangswertproblems $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$, wenn

$$\begin{aligned} w'(t) &> f(t, w(t)) \qquad \text{für } t \in [\tau-a, \tau] \quad \text{und } w(\tau) \leq \xi \\ w'(t) &< f(t, w(t)) \qquad \text{für } t \in [\tau-a, \tau] \quad \text{und } w(\tau) \geq \xi \end{aligned}$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $v : [\tau-a, \tau+b] \to \mathbb{R}$ heißt Unterfunktion / Oberfunktion zu $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$, wenn $v|_{[\tau-a,\tau]}$ linke Unterfunktion / Oberfunktion zu $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$ und $v|_{[\tau,\tau+b]}$ rechte Unterfunktion / Oberfunktion zu $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$ ist.

Aufgabe 39: (10 Punkte)
Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $(\tau, \xi) \in V$, $a, b > 0$ und $f : V \to \mathbb{R}$, ferner sei

$$\begin{aligned} w &: [\tau-a, \tau+b] \to \mathbb{R} \qquad \text{Oberfunktion} \\ \lambda &: [\tau-a, \tau+b] \to \mathbb{R} \qquad \text{Lösung} \\ v &: [\tau-a, \tau+b] \to \mathbb{R} \qquad \text{Unterfunktion} \end{aligned}$$

zum Anfangswertproblem $x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$. Zeige:

$$w(t) > \lambda(t) > v(t) \qquad \text{für alle } t \in [\tau - a, \tau + b] \backslash \{\tau\}.$$

Aufgabe 40: (10 Punkte)
Sei $\varepsilon > 0$ und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $\|w(x)\| < \frac{1}{2}\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < \varepsilon$, wobei $\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Es sei weiter $\lambda : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = -x + w(x).$$

Schätze $\frac{d}{dt}\|\lambda(t)\|^2$ ab und folgere, daß aus $\|\lambda(0)\| < \varepsilon$ stets $\|\lambda(t)\| < \varepsilon$ für alle $t > 0$ sowie $\lambda(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 17.7.2019 14.00 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock