Übungsblatt 1 zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß jede Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$ monoton ist.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \frac{\pi}{2m}\left(1 + x^2\right)\cos(t)\,, \qquad x(2\pi n) = 0\,,$$

auf einem möglichst großen Existenzintervall.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf I. Die auf $V := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in I,\, x > 0\}$ erklärte Differentialgleichung

$$x'(t) \;=\; g(t)\,x(t) \;+\; h(t)\,x^{\alpha}(t) \tag{1}$$

heißt dann Bernoulli-Differentialgleichung.

a) Rechne nach, daß $\lambda \in C^1(I,\mathbb{R})$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn

$$\mu(t) := \lambda(t)^{1-\alpha}$$

eine Lösung von

$$y'(t) \;=\; (1-\alpha)\,\big(g(t)\,y(t) \;+\; h(t)\big)$$

ist.

b) Bestimme eine Lösung von

$$x' + x - t\sqrt{x} = 0, \qquad x(0) = 0 \tag{2}$$

c) Ist die Lösung von (2) eindeutig?

Aufgabe 4: (10 Punkte)

a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in C(I,\mathbb{K})$ sowie $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Funktion $x : I \to \mathbb{K}$,

$$x(t) \;=\; x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}\,, \qquad t \in I\,,$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) \;=\; a(t)\,x(t)\,, \qquad x(t_0) \;=\; x_0\,, \tag{3}$$

ist. Zeige, daß x (bis auf Einschränkungen des Definitionsbereichs I) auch die einzige Lösung von (3) ist. Tip: Falls $y : I \to \mathbb{K}$ eine weitere Lösung ist, dann betrachte $y(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}$.

b) Wir nehmen noch an, daß $I = \mathbb{R}$ gilt und daß a periodisch mit Periode $T > 0$ ist, das heißt, $a(t+T) = a(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige, daß *jede* Lösung der Differentialgleichung $x' = a\,x$ genau dann T-periodisch ist, wenn

$$\int_0^T a(\tau)\,d\tau \;\in\; 2\pi i\,\mathbb{Z}$$

gilt.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 2.5.2019 14.00 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock