Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H11T2A3)

a) Sei h in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und sei eine meromorphe Funktion F durch $F(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ gegeben. Berechnen Sie das Residuum von F in z_0.

b) Klassifizieren Sie für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} \quad \text{und} \quad g(z) = \exp(\exp(-\frac{1}{z}))$$

alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$.

c) Berechnen Sie mit der Funktion f aus (b) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Aufgabe 26: (F18T3A5)

a) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion f sei auf $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ holomorph und habe bei a eine wesentliche Singularität. Sei außerdem g eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Beweisen Sie folgende Aussage: Falls $g(a) \neq 0$, so hat die Produktfunktion $h = fg$ bei a eine wesentliche Singularität.

b) Seien a und f wie im Aufgabenteil (a) und $g = (z-a)^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß die Produktfunktion $h = fg$ in a eine wesentliche Singularität besitzt.

c) Seien a und f wie in Aufgabenteil (a), g sei auf $\mathbb{C}$ meromorph. Beweisen Sie folgende Aussage: Die Produktfunktion $h = fg$ ist auf $\mathbb{C}$ genau dann meromorph, wenn $g \equiv 0$.

Aufgabe 27: (F18T3A1)

a) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

existiert.

b) Berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes. Geben Sie insbesondere Integrationspfade expilizit an und weisen Sie nach, daß die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.