

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (H09T3A3)

Berechnen Sie unter Verwendung eines Integrationsweges, der von 0 über R über $Re^{i\frac{2\pi}{3}}$ zurück nach 0 verläuft, das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Aufgabe 23: (H04T2A1)

Beweisen Sie die beiden Gleichheiten:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 24: (F11T1A4)

Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

\mathbb{C} .

- Zeigen Sie, daß das Integral der Funktion f über die positiv orientierte Kreislinie um 0 mit Radius 3 verschwindet.
- Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), daß f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)